

PERSAMAAN EKSAK

Oleh Dessy Irmawati

METODE IDENTIFIKASI

- Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde pertama

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Dalam beberapa kasus fungsi $f(x,y)$ di sebelah kanan persamaan dapat dituliskan

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Definisi Persamaan Eksak

- Persamaan diferensial

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad (1)$$

disebut persamaan eksak jika ada fungsi kontinyu $u(x,y)$

$$du = M(x,y) dx + N(x,y) dy \quad (2)$$

Pertanyaan:

1. Bagaimana mengetahui persamaan pertama adalah eksak?

2. Bagaimana menentukan fungsi kontinyu $u(x,y)$?

Teorema (kondisi persamaan eksak)

Persamaan $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$

Adalah eksak jika dan hanya jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- Buktikan $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$. Kemudian apakah ada fungsi kontinu $u(x,y)$ dengan persamaan diferensial

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

- Bandingkan dengan persamaan (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

- Persamaan diturunkan terhadap y dan x , maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- $u(x,y)$ kontinu jika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

- Maka didapatkan

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- Sebaliknya jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- Maka dapat ditunjukkan bahwa ada fungsi $u(x,y)$ seperti berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

- Integralkan $\frac{\partial u}{\partial x}$ terhadap x dengan menganggap y tetap.

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \phi(y)$$

- Dimana $\phi(y)$ adalah fungsi y . Untuk membangun fakta tersebut, maka diferensialkan persamaan tersebut terhadap y ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \phi'(y)$$

- Dengan menyamakan persamaan $\frac{\partial u}{\partial x}$ maka

$$\phi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

- Dengan menganggap bahwa diferensial parsial terhadap x dan y , maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'(y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right]$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$= 0$$

Contoh 1

$$(a) (2x + 3y^2)dx + (6xy + 2y)dy = 0$$

$$(b) \left(\frac{y}{x} + 3x^3 \right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y} \right) dy = 0$$

$$(c) (1 - \cos^2 x)dy + y \sin 2x dx = 0$$

$$(d) x \ln x dy + y dx = 0$$

Jawab

(a) $M = 2x + 3y^2$ dan $N = 6xy + 2y$

maka

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6y$$

persamaan tersebut adalah eksak $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Contoh 2

- Temukan nilai k yang membuat persamaan menjadi eksak

$$(a) \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{ky}{x^3} \right) dx - \left(\frac{2y}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dy = 0$$

$$(b) (2x + y \sin xy + ky^4) dx + (x \sin xy - 20xy^3) dy = 0$$

$$(c) (1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 + \frac{kx}{y} \right) dy = 0$$

Penyelesaian

$$(a) \quad M = \frac{y^2}{x^2} + \frac{ky}{x^3} \quad \text{dan} \quad N = -\frac{2y}{x} - \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} + \frac{k}{x^3} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

jika persamaan dianggap eksak maka

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{adalah} \quad \frac{2y}{x^2} + \frac{k}{x^3} = \frac{2y}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$k = 2$$

Penyelesaian persamaan Eksak

1. Bentuk persamaan $Mdx + Ndy = 0$, uji ke eksakannya.

2. Tuliskan $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = N$

3. Integralkan persamaan $\frac{\partial u}{\partial x}$ terhadap x

$$u = \int Mdx + \phi(y)$$

4. Diferensialkan persamaan di atas terhadap y, dan samakan hasilnya dengan persamaan $\frac{\partial u}{\partial y}$

5. Tuliskan penyelesaian dalam bentuk $u(x,y) = A$ di mana A adalah konstanta
6. Jika ada kondisi awal, maka substitusikan ke dalam persamaan umum untuk mendapatkan nilai A

Contoh 3

Selesaikan persamaan berikut:

1. $(6x^2 - 10xy + 3y^2) dx + (-5x^2 + 6xy - 3y^2) dy = 0$

2. $[e^{-y} + \cos(x - y) + 2x] + 2x dx + [-xe^{-y} - \cos(x - y) - 1] = 0$